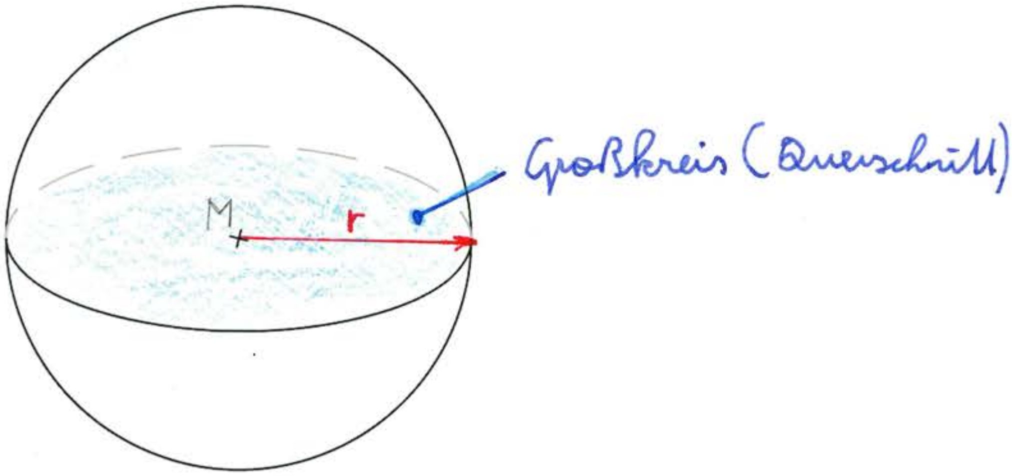
Tafelbild — MA4-119-TB1

Eis und M&M, oder: der ideale Körper

Die Kugel

Die Kugel ist ein besonderer Körper:

+ Mathematisch ideale Form
+ Optimales Verhältnis von Oberfläche zu Volumen
  z. B. Wassertropfen
+ keine Ecken und Kanten



Das Netz einer Kugel kann nicht „eben" dargestellt werden!
→ Verzerrungen bei Karten.

Oberfläche

Es gilt:

$$\boxed{O = 4r^2 \cdot \pi}$$

Herleitung:

Volumen

Es gilt:

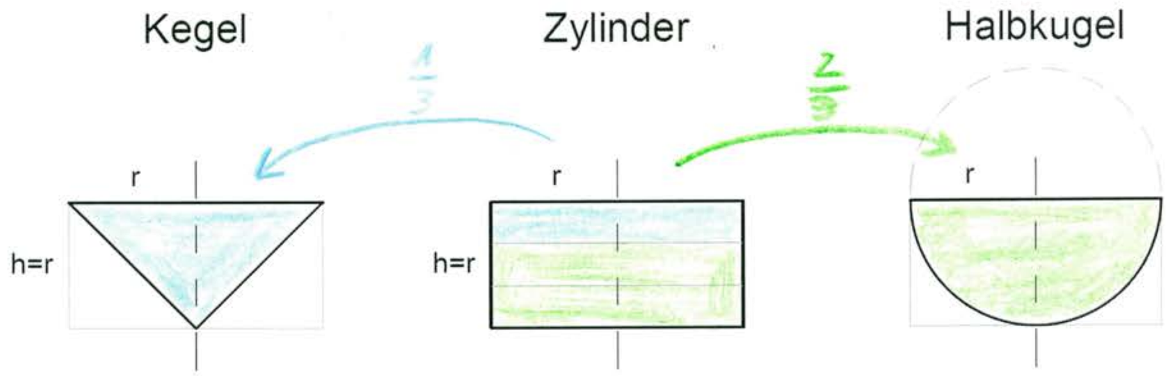
$$\boxed{V = \frac{4r^3 \cdot \pi}{3}}$$

Tafelbild 2

MA4-119-TB2

Herleitung des Volumens: Kegelherleitung nach Archimedes

Schüttversuch



$V_{Kegel} = \frac{G \cdot h}{3}$ $\quad$ $V_{Zylinder} = G \cdot h$ $\quad$ $V_{Halbkugel} = ?$

$V_K = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot r}{3}$ $\quad$ $V_Z = r^2 \cdot \pi \cdot r$

$V = \frac{r^3 \cdot \pi}{3}$ $\quad$ $V_Z = r^3 \cdot \pi$

$$V_{Halbkugel} = V_{Zylinder} - V_{Kegel}$$

$$V_{HK} = r^3 \cdot \pi - \frac{r^3 \cdot \pi}{3}$$ ... gemeinsamer N

$$V_{HK} = \frac{3r^3 \cdot \pi}{3} - \frac{r^3 \cdot \pi}{3}$$

$$V_{HK} = \frac{2r^3 \cdot \pi}{3}$$

$$V_{Kugel} = 2 \cdot V_{Halbkugel}$$

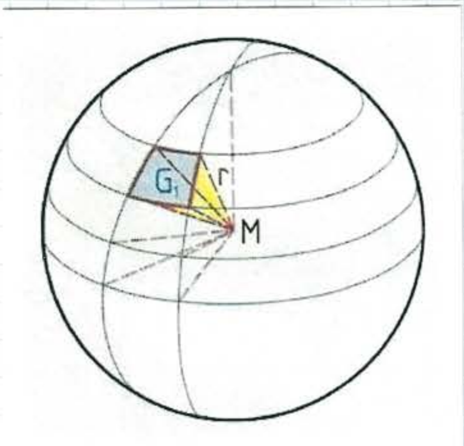
$$V_K = \frac{2 \cdot 2r^3 \cdot \pi}{3}$$

$$\boxed{V_K = \frac{4r^3 \cdot \pi}{3}}$$

Tafelbild 3 MA4-119-TB3

Herleitung der Oberfläche: über Kugelvolumen

Vorstellung: Kugel als Körper, der aus unendlich vielen Pyramiden zusammengesetzt ist.



Bekannt:

$$V_{Kugel} = \frac{4r^3 \cdot \pi}{3}$$

$$V_{Pyramide} = \frac{G \cdot h}{3}$$

h ... Radius Kugel r

Vorstellung: $V_{Kugel} = V_{aller\ Pyramiden}$

$$V_K = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots$$

$r = h$!

$$= \frac{G_1 \cdot r}{3} + \frac{G_2 \cdot r}{3} + \frac{G_3 \cdot r}{3} + \ldots$$

... herausheben $= \frac{r}{3} \cdot (G_1 + G_2 + G_3 + \ldots)$

→ alle Grundflächen = O_{Kugel}!

$$V_K = \frac{r \cdot O_{Kugel}}{3}$$

... einsetzen: $\frac{4r^3 \cdot \pi}{3} = \frac{r \cdot O_{Kugel}}{3}$ → unbekannt ... freistellen nach O_K

somit: $\frac{4r^3 \cdot \pi}{3} = \frac{r \cdot O_K}{3} \quad | \cdot 3$

$$4r^3 \cdot \pi = r \cdot O_K \quad | : r$$

$$4r^2 \cdot \pi = O_K$$

$$\boxed{O_K = 4r^2 \cdot \pi}$$

Tafelbild 4 MA4-119-TB4

Beispiel: Arbeitsbuch S. 163, Nr. 728

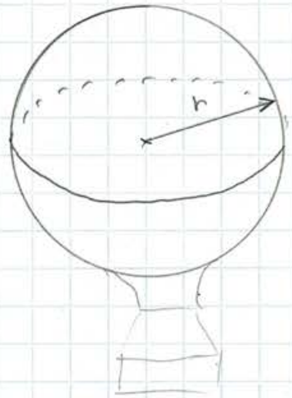
geg.: Heißluftballon (~Kugel)

$r = 6{,}5\,m$

ges.: $O = 531\,m^2$

$m = 31\,kg$

$V = 1150\,m^3$



$O = 4r^2 \cdot \pi$

$= 4 \cdot 6{,}5^2 \cdot \pi$

$O = 530{,}93\,m^2$

Die Oberfläche des Ballons beträgt $531\,m^2$.

Masse m („Gewicht")

$$\boxed{m = V \cdot \rho}$$

... ρ = „Roh": Dichte

Dichte Ballonstoff (Nylon): $\rho = 60\,g/m^2$

$m = V \cdot \rho$

$= 531 \cdot 60$

$m = 31860\,g$

$m = 30{,}8\,kg$

Die Ballonhülle hat eine Masse von ca. 31 kg.

$V = \frac{4r^3 \cdot \pi}{3}$

$= \frac{4 \cdot 6{,}5^3 \cdot \pi}{3}$

$V = 1150{,}35\,m^3$

Im Ballon haben rund $1150\,m^3$ Luft platz.